### Лабораторная работа №5 «Решение задач линейного программирования

**симплекс–методом»**

**Цели работы: н**аучиться решать задачи геометрическим методом, научиться решать задачи симплексным методом, закрепить навыки записи взаимосвязи показателей задачи в виде математической модели.

### Краткая теория

**Линейное программирование** – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Линейное программирование состоит в нахождении экстремального значения линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, связывающих эти переменные.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

* максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
* систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
* требование неотрицательности переменных.

Таким образом, экономико-математическая формулировка и модель общей задачи линейного программирования имеют следующий вид:

найти максимальное (минимальное) значение линейной целевой функции

*n*

*F* ( *X* )  *cj*  *x j*  max(min)

*j* 1

при условиях-ограничениях:

(1)

 *n*





 *i*1

 *n*





 *j* 1

*aij*

*aij*

 *xi*

 *x j*

 *bi* ,

 *bi* ,

*i*  1, *k*

*i*  *k* 1, *m*,

*k*  *m*;

(2)

(3)

  0,

*x*

 *j*



*j*  1, *l*;

*l*  *n*,

(4)

где aij, bi, cj – заданные постоянные величины.

Стандартной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения целевой функции (1) при выполнении условий (2) и (4).

Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения целевой функции (1) при выполнении условий (3) и (4).

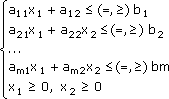
### Графический метод решения двумерной задачи линейного программирования (максимизация целевой функции)

Двумерная задача линейного программирования – задача линейного программирования, количество переменных которой равно 2.

В общем виде двумерную задачу линейного программирования можно представить следующим образом.

Определить значение переменных x1 и x2, при которых линейная целевая функция F достигает максимума (минимума).

F = c1x1+c2x2 → max(min) при ограничениях на переменные



Среди ограничений могут одновременно встречаться знаки ≥, ≤ и =. Коэффициенты aij, bi, cj (i = 1..m, j = 1,2) - любые действительные числа (возможно и 0).

Двумерные задачи линейного программирования обычно решаются графически и решение связано со свойствами выпуклых множеств.

Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую комбинацию.

***Геометрический смысл*** этого определения состоит в том, что множеству вместе с его произвольными точками полностью принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий. Примерами выпуклых множеств являются прямолинейный отрезок, полуплоскость, круг, шар, куб, полупространство и др.

Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто). Непустое множество планов называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений - вершиной.

Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то целевая функция задачи принимает максимальное значение в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение достигается более чем в одной вершине, то целевая функция принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

### Алгоритм решения двумерной задачи линейного программирования графическим методом

*Решение задачи линейного программирования графическим методом включает следующие этапы.*

1. На плоскости Х1ОХ2 строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Строят многоугольник решений.
4. Строят векторN(с1, c2), который указывает направление возрастания целевой функции.
5. Строят начальную прямую целевой функции с1х1 + с2х2 =0 и затем передвигают ее в направлении вектора N до крайней угловой точки многоугольника решений. В результате находят точку, в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо множество точек с одинаковым максимальным значением целевой функции, если начальная прямая сливается с одной из сторон многоугольника решений, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.
6. Определяют координаты точки максимум функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Минимальное значение линейной функции цели находится путем передвижения начальной прямой с1х1 + с2х2 = 0 в направлении, противоположном вектору N(c1,c2).

***Замечание 1:*** *В алгоритме решения пункты 4-6 можно выполнять следующим образом:*

1. Найти значение целевой функции в угловых точках многогранника решений.
2. Точка, в которой функция принимает наибольшее значение и является точкой максимума.

### Пример 1

На предприятии имеется сырье видов I, II, III. Из него можно изготавливать изделия типов *А* и *В*. Пусть запасы видов сырья на предприятии составляют *b*1, *b*2 , *b*3 ед. соответственно, изделие типа *А* дает прибыль *c*1 ден. ед., а изделие типа *В* – *c*2 ден. ед. Расход сырья на изготовление одного изделия задан в условных единицах таблицей. Составить план выпуска изделий, при котором предприятие имеет наибольшую прибыль. Решить задачу графически и симплексным методом.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Изделие | Сырье | | | b1 | b2 | b3 | c1 | c2 |
| I | II | III | 150 | 260 | 300 | 6 | 3 |
| А | 3 | 4 | 3 |
| В | 1 | 3 | 4 |

**Решение.** Составим математическую модель задачи. Обозначим: *x*1 – количество выпускаемых изделий типа *A*, *x*2 - количество выпускаемых изделий типа *B* . Тогда с учетом расходов сырья на изготовление изделия каждого типа получим следующие ограничения на *x*1

и *x*2 , учитывающие запасы сырья каждого вида:

## 3*x*1  *x*2  150

4*x*  3*x*  260

 1

3*x*

2

 4*x*

##  300

 1 2

(1)

По смыслу задачи

*x*1  0, *x*2  0

Прибыль *F* предприятия при плане *x*1, *x*2 равна

*F*  6*x*1  3*x*2 . (3)

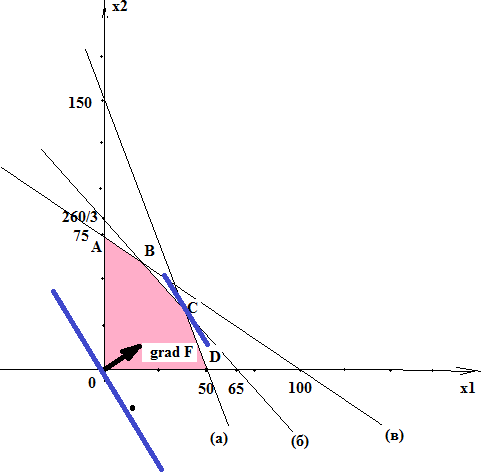
Итак, математическая модель задачи получена: необходимо найти значения *x*1, *x*2 , удовлетворяющие неравенствам (1), (2), для которых функция (3) достигает наибольшего значения. Полученная задача – стандартная задача линейного программирования.

### Решим полученную задачу графически.

Для этого введем систему координат *x*1*Ox*2 и изобразим в ней множество решений систем неравенств (1), (2) (область допустимых решений - *ОДР*) в виде множества точек плоскости.

Условию (2) удовлетворяют точки первой четверти. Для получения полуплоскостей, соответствующих неравенствам системы (1), построим их границы, т.е. прямые линии:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Имя прямой | Уравнение прямой | Таблица для построения прямой | | |
| (а) | 3*x*1  *x*2  150 | х1 | 0 | 50 |
| х2 | 150 | 0 |
| (б) | 4*x*1  3*x*2  260 | х1 | 0 | 65 |
| х2 | 260/3 | 0 |
| (в) | 3*x*1  4*x*2  300 | х1 | 0 | 100 |
| х2 | 75 | 0 |



Пересечение построенных полуплоскостей с первой четвертью – искомая *ОДР*

(многоугольник *OABCD,* рис.1.1*.*).

Ищем координаты вершин *ОДР* и значения целевой функции *F* в этих вершинах:

*O*(0; 0): F(O)=6\*0+3\*0=0$ A(0;75): F(A)=6\*0+3\*75=225;

*B* : (*б*)  4*x*1  3*x*2  260  *x*1  20  *B*(20;60)



 

 2

(*в*) 3*x*1  4*x*2  300 *x*  60

F(B)=6\*20+3\*60=300

*С* : (*a*)  4*x*1  3*x*2  260  *x*1  38



 *С*(38;36)

 

 2

(*б*) 3*x*1  *x*2  150 *x*  36

F(C)=6\*38+3\*36=336 D(50;0) F(D)=6\*50+3\*0=300.

Отсюда

Fmax= F(C)= F(38;36)=336.

**Вывод**: предприятию выгодно выпустить 38 изделий типа *A*(х1=38) и 36 изделия типа *B*

(*х2=36*). При этом его прибыль будет наибольшая и составит 336 ден. ед.

### Симплекс-метод метод решения задачи линейного программирования

Для решения задач линейного программирования предложено немало различных алгоритмов. Наиболее эффективным среди них является алгоритм, известный под названием ***симплексный метод, или метод последовательного улучшения плана***.

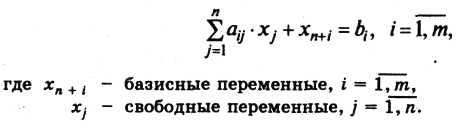
Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцингом в 1949 г., однако еще в 1939 г. идеи метода были разработаны российским математиком Л.В. Канторовичем.

***Симплексный метод*** - это итерационный процесс, который начинается с одного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области возможных решений до тех пор, пока не достигнет оптимального значения, в частности по угловым точкам многоугольника решений, полученного геометрическим методом.

Симплексный метод основан на последовательном переходе от одного опорного плана задачи линейного программирования к другому, при этом значение целевой функции изменяется.

### Алгоритм симплексного метода включает следующие этапы:

1. Составление первого опорного плана. Система ограничений задачи, решаемой симплексным методом, задана в виде системы неравенств смысла «<», правые части которых *bi* > 0. Перейдем от системы неравенств к системе уравнений путем введения неотрицательных дополнительных переменных. Векторы-столбцы при этих переменных представляют собой единичные векторы и образуют базис, а соответствующие им переменные называются базисными:



Решим эту систему относительно базисных переменных:



а функцию цели перепишем в виде уравнения



Полагая, что основные переменные *х1* =... =*хп* =0, получим первый опорный план Х1 = (0, 0, ...,0, *b1, b2,* ..., *bт); F(X1)* = 0, который заносим в симплексную табл. Она состоит из коэффициентов системы ограничений и свободных членов. Последняя строка таблицы называется индексной и заполняется коэффициентами функции цели, взятыми с противо- положным знаком.

1. Проверка плана на оптимальность. Если все коэффициенты индексной строки симплексной таблицы при решении задачи на максимум неотрицательны (> 0), то план является оптимальным. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный и его можно улучшить. В этом случае переходим к следующему этапу алгоритма.
2. Определение ведущих столбца и строки. Из отрицательных коэффициентов индексной строки выбираем наибольший по абсолютной величине, что и определяет ведущий

столбец, который показывает, какая переменная на следующей итерации перейдет из свободных в базисные.

Затем элементы столбца свободных членов симплексной таблицы делим на элементы того же знака (+/+; "/-) ведущего столбца. Результаты заносим в отдельный столбец *di,* которые будут всегда положительные. Строка симплексной таблицы, соответствующая минимальному значению *di,* является ведущей. Она определяет переменную *xi,* которая на следующей итерации выйдет из базиса и станет свободной.

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении ведущих столбца и строки, называют разрешающим и выделяют кружком.

1. Построение нового опорного плана. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана - Гаусса. Сначала заменим переменные в базисе, т. е. вместо *хi* , в базис войдет переменная *хj,* соответствующая ведущему столбцу.

Разделим все элементы ведущей строки предыдущей симплексной таблицы на разрешающий элемент и результаты деления занесем в строку следующей симплексной таблицы, соответствующую введенной в базис переменной *xj.* В результате этого на месте разрешающего элемента в следующей симплексной таблице будем иметь 1, а в остальных клетках *j* столбца, включая клетку столбца индексной строки, записываем нули. Остальные новые элементы нового плана находятся по правилу прямоугольника: НЭ=СТЭ-А. В/РЭ, где СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент, А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Далее возвращаемся ко второму этапу алгоритма — проверке плана на оптимальность.

При решении задачи линейного программирования на минимум целевой функции признаком оптимальности плана являются отрицательные значения всех коэффициентов индексной строки симплексной таблицы.

### Пример 2.

Предприятие выпускает три вида изделий (N1, N2, N3), используя три вида ресурсов (Р1, Р2, Р3). Запасы ресурсов (З) ограничены. Прибыль от реализации (П) единицы изделия и нормы расхода ресурсов представлены в таблице. Определить ассортимент и объемы выпуска продукции, получаемую прибыль, величину остатков. Найти решение задачи симплексным методом с представлением всех симплексных таблиц и проанализировать полученные результаты.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | N1 | N2 | N3 | З |
| Р1 | 1 | 3 | 4 | 42 |
| Р2 | 4 | 2 | 2 | 54 |
| Р3 | 3 | 2 | 2 | 80 |
| П | 2 | 1 | 3 |  |

**Решение:** Запишем математическую модель задачи.

Определим вектор *X*  (*x*1 , *x*2 , *x*3 ) , который удовлетворяет условиям

*x*1  3*x*2  4*x*3  42,

4*x*  2*x*  2*x*  54,

 1 2 3



3*x*1  2*x*2  2*x*3  80,

*x*1  0, *x*2  0, *x*3  0

и обеспечивает максимальное значение целевой функции

*F*(*X* )  2*x*1  *x*2  3*x*3  max

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных x4, x5, x6:

## *x*1  3*x*2  2*x*3  *х*4  42,



4*x*1  2*x*2  2*x*3  *х*5  54,

3*x*  2*x*  2*x*  *х*  80,

 1 2 3 6

Полагая, что свободные переменные x1=0, x2=0, x3=0, получим первый опорный план

*X* 1  (0, 0, 0, 42, 54, 80), *F* ( *X* 1 )  0 , в котором базисные переменные x4=39, x5=89,

x6=59. Следовательно, изделия не производятся, доход равен нулю, а ресурсы не используются. Полученный первый опорный план запишем в симплексную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | СЗ | БП | ЗБП | Значение коэффициентов при | | | | | |  *i*  min |
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 |
| I | 0  0  0 | →x4 x5  x6 | 42  54  80 | 1  4  3 | 3  2  2 | **4**  2  2 | 1  0  0 | 0  1  0 | 0  0  1 | 42/4=10,5  54/2=27  80/2=40 |
| Индексная строка | *F* ( *X* 1 ) =0 | | | -2 | -1 | -3↑ | 0 | 0 | 0 |  |

Первый опорный план неоптимальный, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты: -2, -1, -3.

За ведущий столбец выберем столбец, соответствующий переменной x3, так как, сравнивая по модулю, имеем: |-3|>{|-1|,|-2|}.

Вычислим значения *i*



наименьшее:

по строкам как частное от деления

*ЗБП*

*x*3

и из них выберем

 *ЗБП* 

 42

54 80 

min *i*  min 

 *x*3

  min ;

  4

;  10.5.

2 2 

Следовательно, ведущая строка- х4.

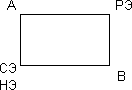




Разрешающий элемент равен РЭ=4 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки и выделен в таблице.

Формируем следующую часть симплексной таблице. Вместо переменной x4 в план II войдет переменная x3. Строка, соответствующая переменной x3 в плане II, получена в результате деления всех элементов строки x4 плана I на разрешающий элемент РЭ=4. На месте разрешающего элемента в плане II получаем 1. В остальных клетках столба x3 плана II записываем нули.

Таким образом, в новом плане II заполнены строки x3 и столбец x3. Все остальные элементы нового плана II, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ=4.



Значение нового элемента в плане II находится из выражения:

*НЭ*  *СЭ*  ( *А* *В*)

*РЭ*

Все элементы, расположенные на пересечении строк и столбцов, соответствующих одноименным базисным элементам, равны 1, остальные элементы столбца в базисах векторов, включая индексную строку, равны 0. Аналогично проводятся расчеты по всем строкам таблицы, включая индексную.

Построим вторую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | СЗ | БП | ЗБП | Значение коэффициентов при | | | | | |  *i*  min |
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 |
| II | 3  0  0 | х3  →x5 x6 | 10,5  33  59 | 0,25  **3,5**  0,5 | 0,75  0,5  0,5 | 1  0  0 | 0,25  -0,5  -0,5 | 0  1  0 | 0  0  1 | 42  9,43  118 |
| Индексная строка | *F* ( *X* 2 ) =3-10,5=31,5 | | | -1,25↑ | 1,25 | 0 | 0,75 | 0 | 0 |  |

Второй опорный план неоптимальный, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты: -1,25.

За ведущий столбец выберем столбец, соответствующий переменной x1.

*ЗБП*



Вычислим значения *i* по строкам как частное от деления *x*1 и из них выберем наименьшее:

 *ЗБП* 

10,5 33

59 

min *i*  min  *x*   min  ; ;   min 42; 9,43; 118  9,43.

 1 

0,25

3,5 0,5

Следовательно, ведущая строка- х5.

Разрешающий элемент равен РЭ=3,5 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки и выделен в таблице.

Формируем следующую часть симплексной таблице. Вместо переменной x5 в план III войдет переменная x1. Строка, соответствующая переменной x1 в плане III, получена в результате деления всех элементов строки x5 плана II на разрешающий элемент РЭ=3.5. На месте разрешающего элемента в плане III получаем 1. В остальных клетках столбца x1 плана III записываем нули.

Таким образом, в новом плане III заполнены строки x1 и столбец x1. Все остальные элементы нового плана III, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Все элементы, расположенные на пересечении строк и столбцов, соответствующих одноименным базисным элементам, равны 1, остальные элементы столбца в базисах векторов, включая индексную строку, равны 0. Аналогично проводятся расчеты по всем строкам таблицы, включая индексную.

Построим третью симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | СЗ | БП | ЗБП | Значение коэффициентов при | | | | | |  *i*  min |
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 |
|  | 3 | х3 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 2 | x1 | 8,143 | 1 | 0,714 | 1 | 0,286 | -0,071 | 0 |
| III | 0 | x6 | 9,429 | 0 | 0,143 | 0 | -0,143 | 0,286 | 0 |
|  |  |  | 35,429 | 0 | 0,143 | 0 | -0,143 | -0,714 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Индексная строка | *F* ( *X* 3 ) = 3\*8,143+2\*9,429=  =43,286 | 0 | 0,357 | 0 | 0,571 | 0,357 | 0 |  |

Получаем план III, который является оптимальным, так как все коэффициенты в индексной строке  0.

Оптимальный план можно записать так:

\*

*X*  (9,429,

\*

0, 8,143,

0, 0,

35,429),

*F*  43,286

**Вывод:** Для получения максимального дохода 43,286 у.е. предприятию необходимо производить изделий первого вида 9,429 ед., третьего вида – 8,143 ед., изделия второго вида не производятся.

При этом ресурсы первого и второго видов расходуются полностью, ресурсы третьего остаются в количестве 35,429ед.

### Задание 1

На предприятии имеется сырье видов I, II, III. Из него можно изготавливать изделия типов А и В. Пусть запасы видов сырья на предприятии составляют b1, b2, b3 ед. соответственно, изделие типа А дает прибыль с1 ден.ед., а изделие типа В - с2 ден.ед. Расход сырья на изготовление одного изделия задан в словных единицах таблицей.

Составить план выпуска изделий, при котором предприятие имеет наибольшую прибыль. Решить задачу графическим методом.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1 вариант** | | | | | | | | |
| Изделие | Сырье | | | b1 | b2 | b3 | с1 | с2 |
| I | II | III | 102 | 91 | 105 | 5 | 9 |
| А | 6 | 3 | 2 |
| В | 3 | 4 | 5 |
| **2вариант** | | | | | | | | |
| Изделие | Сырье | | | b1 | b2 | b3 | с1 | с2 |
| I | II | III | 20 | 36 | 40 | 2 | 5 |
| А | 1 | 1 | 3 |
| В | 3 | 2 | 1 |
| **3 вариант** | | | | | | | | |
| Изделие | Сырье | | | b1 | b2 | b3 | с1 | с2 |
| I | II | III | 40 | 34 | 46 | 1 | 2 |
| А | 2 | 1 | 3 |
| В | 2 | 2 | 1 |
| **4 вариант** | | | | | | | | |
| Изделие | Сырье | | | b1 | b2 | b3 | с1 | с2 |
| I | II | III | 300 | 520 | 600 | 6 | 3 |
| А | 3 | 4 | 3 |
| В | 1 | 3 | 4 |

### Задание 2

Предприятие выпускает три вида изделий (N1, N2, N3), используя три вида ресурсов (Р1, Р2, Р3). Запасы ресурсов (З) ограничены. Прибыль от реализации (П) единицы изделия и нормы расхода ресурсов представлены в таблице. Определить ассортимент и объемы выпуска продукции, получаемую прибыль, величину остатков. Найти решение задачи симплексным методом с представлением всех симплексных таблиц и проанализировать полученные результаты.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 1** | | | | | | | | | |
|  | N1 | | N2 | | N3 | | З | | |
| Р1 | 1 | | 8 | | 5 | | 43 | | |
| Р2 | 4 | | 1 | | 6 | | 74 | | |
| Р3 | 5 | | 2 | | 2 | | 35 | | |
| П | 5 | | 7 | | 6 | |  | | |
| **Вариант 2** | | | | | | | | | | | |
|  | | N1 | | N2 | | N3 | | | З | | |
| Р1 | | 3 | | 5 | | 4 | | | 81 | | |
| Р2 | | 6 | | 1 | | 3 | | | 74 | | |
| Р3 | | 1 | | 5 | | 2 | | | 33 | | |
| П | | 4 | | 8 | | 7 | | |  | | |
| **Вариант 3** | | | | | | | | | | |  |
|  | | N1 | N2 | | N3 | | | З | | |
| Р1 | | 6 | 7 | | 2 | | | 57 | | |
| Р2 | | 6 | 6 | | 1 | | | 97 | | |
| Р3 | | 3 | 7 | | 8 | | | 63 | | |
| П | | 5 | 6 | | 8 | | |  | | |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 4** | | | | |
|  | N1 | N2 | N3 | З |
| Р1 | 7 | 8 | 3 | 81 |
| Р2 | 4 | 1 | 6 | 68 |
| Р3 | 5 | 1 | 7 | 54 |
| П | 2 | 5 | 6 |  |